	Минобрнауки России
	ФГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной
и воспитательной работе
__________ А.А. Шматько
«26» сентября 2019 г.

ПРОГРАММА
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОМУ ПРЕДМЕТУ

«МАТЕМАТИКА»

для поступающих в 2020 году

Армавир, 2019 г.

	Должность	*Фамилия*	*Подпись*
Согласовано	*Начальник управления академической политики и контроля*	*И.В. Насикан*	

ПРОГРАММА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Порядок проведения вступительного испытания

Вступительное испытание по математике проводится в форме письменного бланкового тестирования. Накануне испытания в соответствии с расписанием, утвержденным председателем приемной комиссии, проводится консультация, где абитуриент может получить ответы на вопросы по содержанию тестовых заданий, по порядку организации и проведения вступительного испытания, а также порядку оценивания результатов выполнения тестовой работы. Посещение консультации не является обязательным для абитуриента.

В определенное расписанием вступительных испытаний время абитуриент прибывает на испытание, имея при себе паспорт, лист учета вступительных испытаний и **шариковую** ручку со стержнем черного цвета. После размещения абитуриентов в аудиториях уполномоченные представители приемной и предметной комиссий объясняют правила выполнения письменной тестовой работы, порядок заполнения бланков ответов и раздают бланки с тестовыми заданиями, бланки для выполнения заданий, оформления ответов, а также бланки для выполнения черновых записей. С этого момента начинается отсчет времени выполнения тестовой работы.

По окончании отведенного времени абитуриенты сдают все необходимые бланки и листы учета вступительных испытаний уполномоченным членам предметной и приемной комиссий и покидают аудиторию.

На вступительном испытании абитуриенту запрещается иметь при себе и использовать средства связи!

На выполнение тестовой работы отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Пояснительная записка

Настоящая программа состоит из трех разделов. В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий.

Во втором разделе перечислены основные формулы и теоремы, которые должен знать поступающий. При подготовке к экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений из этого раздела.

В третьем разделе указаны основные умения и навыки, которыми должен владеть поступающий.

Объем знаний и степень владения материалом, описанные в программе, соответствуют федеральному компоненту государственного стандарта основного общего и среднего (полного) общего образования. Объекты и факты, не изучаемые в школе, также могут использоваться поступающим, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с многообразием школьных учебников и их переизданием некоторые утверждения из второго раздела могут в отдельных учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

Экзаменационная работа состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий:

– часть 1 содержит 8 заданий (задания 1–8) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби;

– часть 2 содержит 4 задания (задания 9–12) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби и 7 заданий (задания 13–19) с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

Задания части 1 направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях.

Посредством заданий части 2 осуществляется проверка освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения математики в профессиональной деятельности и на творческом уровне.

По уровню сложности задания распределяются следующим образом: задания 1–8 имеют базовый уровень; задания 9–17 – повышенный уровень; задания 18 и 19 относятся к высокому уровню сложности.

Задания части 1 предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне. Задание с кратким ответом (1–12) считается выполненным, если в бланке ответов зафиксирован верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задания 13–19 с развернутым ответом, в числе которых 5 заданий повышенного и 2 задания высокого уровней сложности, предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вузов. При выполнении заданий с развернутым ответом части 2 экзаменационной работы должны быть записаны полное обоснованное решение и ответ для каждой задачи.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня (задания 1–8). Часть 2 содержит 9 заданий повышенного уровня (задания 9–17) и 2 задания высокого уровня сложности (задания 18, 19).

Система оценивания выполнения отдельных заданий и экзаменационной работы в целом.

Правильное решение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если экзаменуемый дал правильный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Решения заданий с развернутым ответом оцениваются от 0 до 4 баллов. Полное правильное решение каждого из заданий 13–15 оценивается 2 баллами; каждого из заданий 16 и 17 – 3 баллами; каждого из заданий 18 и 19 – 4 баллами.

Таблица перевода первичных баллов в итоговые

Первичный	1	2	3	4	5	6	7	8
Итоговый	5	9	14	18	23	27	33	39
Первичный	9	10	11	12	13	14	15	16
Итоговый	45	50	56	62	68	70	72	74
Первичный	17	18	19	20	21	22	23	24
Итоговый	76	78	80	82	84	86	88	90
Первичный	25	26	27	28	29	30	31	32
Итоговый	92	94	96	98	99	100	100	100

I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Общий наибольший делитель. Общее наименьшее кратное.
2. Признаки делимости на 2,3,5,9,10.
3. Целые числа (Z). Рациональные числа (Q), их сложение, вычитание и деление. Сравнение рациональных чисел.
4. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей. Действия над действительными числами, их сравнение.
5. Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.
6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.
7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.
8. Логарифмы, их свойства.
9. Одночлен и многочлен.
10. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.
11. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции.
12. График функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность.
13. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее (наименьшее) значение функции на промежутке.
14. Определение и основные свойства функции: линейной, квадратичной $y=ax^2+bx+c$,степенной $y=ax^n (n\in N)$, $y=k/x$, показательной $y=a^x$, логарифмической, тригонометрических функций ($y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg} x$), арифметического корня $y=\sqrt{x}$.
15. Уравнение. Корни уравнения. Понятия о равносильных уравнениях.
16. Неравенства. Решения неравенств. Понятие о равносильных неравенствах.
17. Система уравнений и неравенств. Решение системы.
18. Арифметическая и геометрическая прогрессии формула n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.
19. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).
20. Преобразование в произведение сумм $\sin\alpha \pm \sin\beta$; $\cos\alpha \pm \cos\beta$.
21. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.
22. Производные функций $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\mathrm{tg} x$; $y=x^n$ $(n\in Z)$;$y=e^x$, $y=a^x$, $y=\ln x$; $y=\log_a x$.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.
2. Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.
3. Векторы. Операции над векторами.
4. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.
5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.
6. Четырехугольник: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.
7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.
8. Центральные и вписанные углы.
9. Формула площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба квадрата, трапеции.
10. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.
11. Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.
12. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.
13. Параллельность прямой и плоскости.
14. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.
15. Двухгранные углы. Линейный угол двухгранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.
16. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.
17. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.
18. Формула объема параллелепипеда.
19. Формулы площади поверхности и объема призма.
20. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.
21. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.
22. Формулы площади поверхности и объема конуса.
23. Формула объема шара.
24. Формула площади поверхности сферы.

II. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y=ax+b$ и ее график.
2. Свойства функции $y=k/x$ и ее график.
3. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.
4. Формула корней квадратного уравнения.
5. Теорема Виета (прямая и обратная).
6. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
7. Свойства числовых неравенств.
8. Логарифм произведения, степени, частного.
9. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n-го члена и суммы первых -n членов прогрессии.
10. Определение и свойства функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ и их графики.
11. Определение и свойства функции $y=\mathrm{tg}x$ и ее график.
12. Решение уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\mathrm{tg}x=a$.
13. Формулы приведения.
14. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
15. Тригонометрические функции двойного аргумента.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.
2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.
3. Признаки параллельности прямых.
4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.
5. Признаки равенства треугольников.
6. Признаки параллелограмма.

7. Окружность, описанная около треугольника.
8. Окружность, вписанная в треугольник.
9. Свойство касательной к окружности.
10. Величина угла, вписанного в окружность.
11. Признаки подобия треугольников.
12. Теорема Пифагора.
13. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.
14. Теоремы синусов и косинусов.
15. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.
16. Признак параллельности прямой и плоскости.
17. Признак параллельности плоскостей.
18. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.
19. Перпендикулярность двух плоскостей.
20. Теорема о трех перпендикулярах.

III. ОСНОВНЫЕ УМЕНИЯ И НАВЫКИ

Экзаменующий должен уметь:

1. Уметь выполнять вычисления и преобразования.

1.1. Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма.

1.2. Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

1.3. Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы логарифмы и тригонометрические функции.

2. Уметь решать уравнения и неравенства.

2.1. Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

2.2. Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод.

2.3. Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.

3. Уметь выполнять действия с функциями.

3.1. Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций.

3.2. Вычислять производные и первообразные элементарных функций.

3.3. Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции.

4. Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.

4.1. Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

4.2. Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы.

4.3. Определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами.

5. Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.

5.1. Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

5.2. Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

5.3. Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения.

5.4. Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

6. Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

6.1. Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах.

6.2. Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках.

6.3. Решать прикладные задачи, в том числе социально - экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

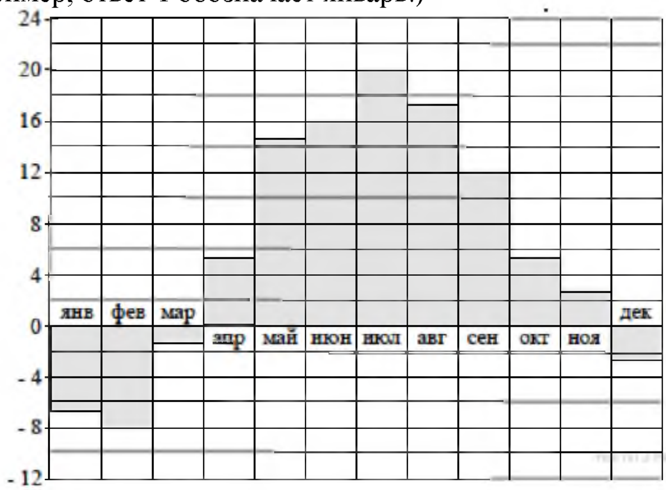
ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ТЕСТОВОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 1.

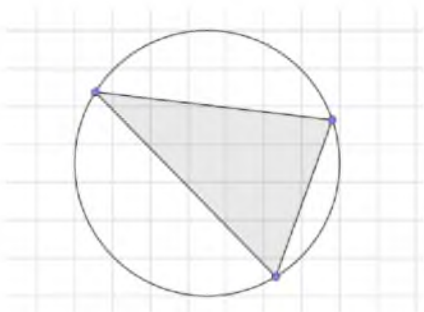
Задания с записью краткого ответа.

1. В магазине вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 20 % от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 4100 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, в каком месяце среднемесячная температура впервые превысила 14 °C. В ответе запишите номер месяца. (Например, ответ 1 обозначает январь.)



3.На клетчатой бумаге с размером клетки 1x×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



4. На конференцию приехали 5 учёных из Австрии, 4 из Германии и 6 из Сербии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что десятым окажется доклад учёного из Сербии.

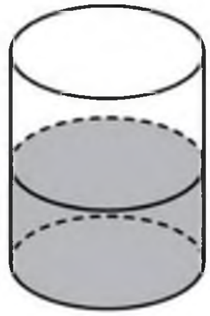
5. Найдите корень уравнения

$$\sqrt{\frac{7}{4x-57}}=\frac{1}{3}.$$

6. Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 23. Высота трапеции равна 20. Найдите тангенс острого угла трапеции.

7. Прямая $y=3x+7$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-5x+4.$ Найдите абсциссу точки касания.

8. В цилиндрический сосуд налили 1800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 2 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.



Часть 2.

9. Найдите значение выражения

$$\left(16a^{12}b^3 - (6a^4b)^3\right) : (10a^{12}b^3)$$

при $a = -1{,}9$ и $b = 4{,}8$.

10. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене p = 500 руб. за единицу, переменные текущие затраты на производство одной единицы продукции составляют v = 300 руб., постоянные расходы предприятия f = 700 000 руб. в месяц. Месячная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$, где q (единиц продукции) — месячный объём производства. Определите значение q, при котором месячная прибыль предприятия будет равна 500 000 руб.

11. Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 280 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

12.Найдите наименьшее значение функции

$$y = 11 + \frac{7\pi\sqrt{3}}{18} - \frac{7\sqrt{3}}{3}x - \frac{14\sqrt{3}}{3}\cos x$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Задания с развернутым решением.

13. а) Решите уравнение

$$25^{\sin x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}\sin(2x)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14.В правильной четырехугольной пирамиде SABCD все ребра равны 5. На ребрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что

$$PA = AQ = RC = 2.$$

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

15. Решите неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}.$$

16.В трапецию ABCD с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O.

а) Докажите, что $\sin\angle AOD = \sin\angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

17.В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — натуральное число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}5S$	$0{,}3S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет составлять целое число миллионов рублей.

18. Найдите все значения а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y^2 - xy + x - 3y + 2)\sqrt{x+3} = 0, \\ a - x - y = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19. В каждой клетке квадратной таблицы 6х6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?

б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?

в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

Решения заданий с развернутым ответом

Задание 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

а)Решите уравнение $25^{\sin x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}\sin(2x)}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

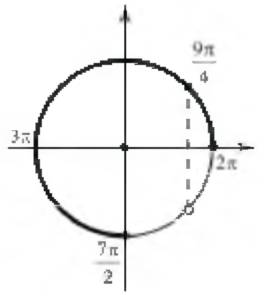
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$5^{2\sin x} = 5^{\sqrt{2}\sin(2x)} \Leftrightarrow 2\sin x = \sqrt{2}\sin(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x = 2\sqrt{2}\sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Получаем: $2\pi,\ \frac{9\pi}{4}\ 3\pi.$

Ответ: а) $\left\{\pi k;\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi,\ \frac{9\pi}{4}\ 3\pi.$

Задание 14.

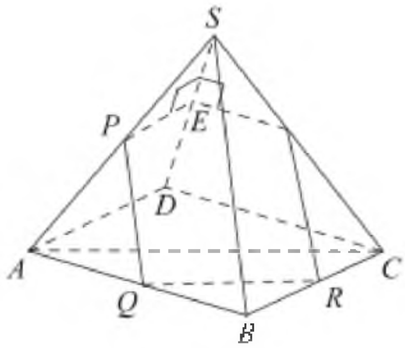
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 5. На ребрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA=AQ=RC=2.$

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

Решение.



а) Стороны треугольника SBD равны 5, 5 и $5\sqrt{2}$, поэтому он прямоугольный, то есть прямая DS перпендикулярна прямой SB. Поскольку прямые SB и PQ параллельны, прямая DS перпендикулярна прямой PQ. Прямая AC перпендикулярна прямой BD, и по теореме о трех перпендикулярах прямая AC перпендикулярна прямой SD, а значит, и прямая QR перпендикулярна прямой SD.

Таким образом, плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Пусть плоскость PQR пересекает ребро SD в точке E. Из доказанного следует, что прямая PE перпендикулярна прямой SD, откуда $SE=SP\cos 60^\circ=\frac{3}{2}.$

Значит, $DE=SD-SE=\frac{7}{2}.$ Поскольку плоскость PQR перпендикулярна ребру SD, искомое расстояние равно DE.

Ответ: б) $\frac{7}{2}$.

Задание 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением точки 8 ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решите неравенство $\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)} \ge \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}$.

Решение.

Пусть $t = \log_8 x$, решим рациональное неравенство:

$$\frac{t}{t-2} \ge \frac{2}{t} + \frac{3}{t^2-2t} \Leftrightarrow \frac{t\cdot t - 2(t-2) - 3}{t(t-2)} \ge 0$$

$$\frac{t^2-2t+1}{t(t-2)} \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t(t-2)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<0, \\ t=1, \\ t>2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной, получим: $0<x<1$, $x=8$, $x>64$.

Ответ: $(0;1)\cup\{8\}\cup(64;+\infty)$.

Задание 16.

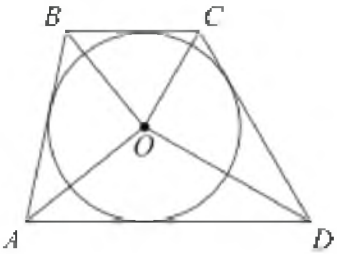
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O.

а) Докажите, что $\sin\angle AOD = \sin\angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90°$, а основания равны 5 и 7.

Решение.



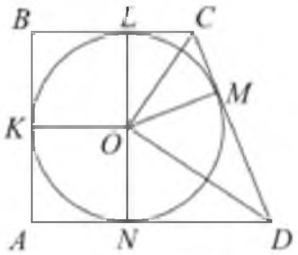
а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC. Сумма этих углов равна $180°$, поэтому сумма углов BAO и ABO равна $90°$.

Аналогично, $\angle COD = 90°$. Тогда $\angle AOD + \angle BOC = 360° - (\angle AOB + \angle COD) = 180°$.

Следовательно, $\sin \angle AOD = \sin(180° - \angle BOC) = \sin \angle BOC$.

б) Окружность радиуса R, вписанная в прямоугольную трапецию $ABCD$, касается ее сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M и N соответственно. Тогда $AKON$ и $BKOL$ — квадраты, поэтому $BL = OL = R$, $AN = ON = R$. Значит,

$$CM = CL = BC - BL = 5 - R, \quad DM = DN = AD - AN = 7 - R.$$



Отрезок $OM = R$ — высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, поэтому $OM^2 = CM \cdot DM$, то есть $R^2 = (5-R)(7-R)$. Откуда находим, что $R = \frac{35}{12}$. Следовательно, площадь трапеции равна:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) + \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot 2R = 35.$$

Ответ: б) 35.

Задание 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обоснованию	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — натуральное число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}5S$	$0{,}3S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет составлять целое число миллионов рублей.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) на июль каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S;\ 0{,}7S;\ 0{,}5S;\ 0{,}3S;\ 0.$$

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 25%, значит, долг в январе каждого года равен:

$$1{,}25S;\ 0{,}875S;\ 0{,}625S;\ 0{,}375S.$$

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$$0{,}55S;\ 0{,}375S;\ 0{,}325S;\ 0{,}375S.$$

По условию, сумма выплат

$$0{,}55S+0{,}375S+0{,}325S+0{,}375S=1{,}625S=\frac{13S}{8}$$

должна быть натуральным числом. Значит, число S должно делиться на 8. Наименьшее натуральное число, делящееся на 8 — это число 8.

Ответ: 8.

Задание 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=-4$ и/или $a=-2$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток (-4;-2) множества значений a, возможно, с включением/исключением граничных точек	2
Верно найдено хотя бы одно из значений a: $a=-2$ или $a=0$; ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(y^2-xy+x-3y+2)\sqrt{x+3}=0,\\ a-x-y=0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$(y-1)(y-x-2)\sqrt{x+3}=0.$$

Решения первого уравнения системы совпадают с решениями уравнений $y=1, y=x+2,$ и $x=-3$ при условии $x\geq -3$.

При $x=-3$ уравнение $a-x-y=0$ имеет единственное решение при любом значении a.

При $y=1$ уравнение $a-x-y=0$ принимает вид $a-x-1=0,$ откуда $x=a-1.$ С учетом условия $x\geq -3$ получаем, что при $a<-2$ решений нет, а при $a\geq -2$ имеется одно решение.

При $y=x+2$ уравнение $a-x-y=0$ принимает вид $a-x-x-2=0,$ откуда $x=\frac{a}{2}-1.$ С учетом условия $x\geq -3$ получаем, что при $a<-4$ решений нет, а при $a\geq -4$ имеется одно решение.

Определим значения a, при которых возможны совпадения решений из трех разобранных выше случаев. Имеем: либо $x=-3,\ y=1$, откуда $a=-2$; либо $x=-3,\ y=x+2=-1$, откуда $a=-4$; $y=1,\ y=x+2$ откуда $x=-1,\ a=0$.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a\leq -4$, имеет два решения при $-4<a\leq -2$ и $a=0$, имеет три решения при при $-2<a<0$ и $a>0$.

Ответ: $-4<a\leq -2; a=0$.

Задание 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Приведем верный пример в пункте а и обоснованно получен верный ответ в пункте в ИЛИ обоснованно получены верные ответы в пунктах б и в	3
Приведен верный пример в пункте а и обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ обснованно получен верный ответ в пункте в	2
Приведен верный пример в пункте а или обоснованно получен верный ответ в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В каждой клетке квадратной таблицы 6x6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.
а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?
б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?
в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?
Решение.
а) Да. Например, если числа расставить так, как показано в таблице, приведенной ниже слева, Петя получит 12, а Вася — 6.
б) Наименьшая сумма, которая может получиться у Васи, равна 6. Чтобы у Пети было в 6 раз больше, его сумма должна равняться 36. Для этого в каждой строке все числа должны быть равны 6. Но тогда Вася не получит в сумме 6. Противоречие.

в) Для таблицы 2, приведенной ниже справа, Петя получит 31, а Вася — 6. Тем самым, у Пети в $\frac{31}{6}$ раза больше, чем у Васи. Покажем, что большего отношения получить невозможно. Действительно, для любой заданной таблицы чисел достичь наибольшего отношения сумм наименьших по строкам и столбцам элементов можно, преобразовав ее следующим образом:
1) записать строки в порядке убывания (невозрастания) наименьших элементов в них;
2) затем внутри каждого из столбцов заменить элементы более высоких строк на большие элементы из нижних строк. При этом наименьшие элементы в каждой из строк не уменьшаются, а наименьшие элементы в каждом из столбцов не меняются (*).
В результате ходов 1) и 2) любая исходная таблица преобразуется в таблицу, где внутри каждого из столбцов элементы записаны в порядке неубывания. В силу (*) отношение сумм наименьших по строкам и столбцам элементов для полученной таблицы максимально. Следовательно, наибольшее отношение будет достигнуто для таблицы, в которой элементы каждой строки, кроме последней, максимальны (т. е. равны 6), а последней — минимальны (т. е. равны 1).

	Числа	Наим. по строке
	4 4 4 4 4 4	4
	4 4 4 4 4 4	4
	1 1 1 1 1 1	1
	1 1 1 1 1 1	1
	1 1 1 1 1 1	1
	1 1 1 1 1 1	1
Наим. по столбцу	1 1 1 1 1 1	

	Числа	Наим. по строке
	6 6 6 6 6 6	6
	6 6 6 6 6 6	6
	6 6 6 6 6 6	6
	6 6 6 6 6 6	6
	6 6 6 6 6 6	6
	1 1 1 1 1 1	1
Наим. по столбцу	1 1 1 1 1 1	

Другое решение.

а) Да. Заполним, например, первую строку таблицы единицами, вторую тройками, а остальные — двойками. Тогда сумма у Васи будет 6, а у Пети 12.

б) Нет. Васина сумма не меньше 6, а Петина не больше 36, поэтому они могут отличаться в 6 раз только если равны 6 и 36, то есть все Петины числа — шестерки. Значит, все числа во всех строках равны шести, и Васина сумма тоже равна 36.

в) Если занять первую строку единицами, а остальные строки шестерками, то у Пети получится сумма 31, то есть отличаться они будут в $\frac{31}{6}$ раза.

Если у Васи сумма не равна 6, то отличие не более чем в $\frac{36}{7} < \frac{31}{6}$, поэтому такие варианты не подходят. Если же Васина сумма равна 6, то в таблице обязательно есть число 1. Петя выберет его как наименьшее в какой-то строке и общая сумма будет не больше $5 \cdot 6 + 1 = 31$, поэтому приведенный нами ответ оптимальный.

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{31}{6}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. / В.В. Вавилов [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 244 с.
2. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 272 с.
3. Крамор В.С. Задачи с параметрами и методы их решения. – М.: Изд-во «Мир и Образование», 2007. – 416 с.
4. Лунгу К.Н. Задачи по математике / Лунгу К.Н., Макаров Е.В. — Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.— 336 с.
5. Маслова Т.Н. Справочник по математике / Маслова Т.Н., Суходский А.М.— М.: Мир и Образование, 2013.— 672 с.
6. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 2: учебно-методическое пособие/ Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014. – 256 с.
7. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных / С.В. Кравцев и др. – М.: Изд-во «Экзамен», 2005. – 544 с.
8. Норин А.В. и др. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учебное пособие. – Спб.: Питер, 2008. – 223 с.
9. Полякова Е.А. Уравнения и неравенства с параметрами в профильном 11 классе. Методические рекомендации и поурочное планирование. – М.: Илекса, 2010. – 96 с.
10. Потапов М.К. Конкурсные задачи по математике: справочное пособие/ Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.— 416 с.
11. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание С3. Решение неравенств с одной переменной. – Ростов-на-Дону, Легион, 2014. – 176 с.
12. Рывкин А.А. Сборник задач по математике с решениями для поступающих в вузы / Рывкин А.А., Ваховский Е.Б. — М.: Мир и Образование, Оникс 21 век, 2003.— 544 с.
13. Сердюков В.А. ЕГЭ для родителей абитуриентов (математика, физика, информатика)/ Сердюков В.А.— М.: Дашков и К, 2013. — 152 с.
14. Севрюков П.Ф. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие. – М.: Илекса, 2011. – 212 с.
15. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 272 с.
16. Шахмейстер А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами. – Спб.: «Петроглиф», 2006. – 304 с.